OLASILIKVE İSTATİSTİK

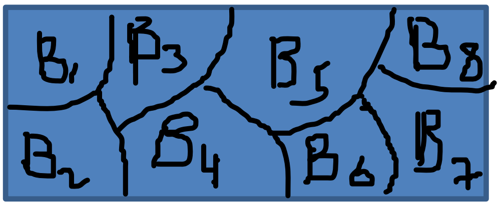
Tanım. (Örnek uzayın parçalanışı)

S örnek uzayının; sonlu sayıda karşılıklı ayrık olayların birleşimi şeklinde gösterilmesine, S 'nin parçalanışı denir.

$B_i \cap B_j = \emptyset$; $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, k$ olmak üzere $S = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$

Örneğin $k = 8$ için

S



Teorem. B_1 , B_2 , … , B_k lar sonlu bir S örnek uzayının parçalanışı ise

$$P(B_1) + P(B_2) + \cdots + P(B_k) = 1$$

dir.

Teorem. (Toplam olasılık formülü)

B_1 , B_2 , … , B_k lar sonlu bir S örnek uzayının parçalanışı ise S 'deki herhangi bir A olayı için

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) P(A \,/\, B_i)$$

dir.

Örnek. Bir depoda 20 kusurlu 80 sağlam elektrik ampulü bulunsun. Yerine koymaksızın 2 ampul seçelim. İkinci seçilen ampulün kusurlu olma olasılığını bulunuz.

Çözüm.

$$B_1: \text{"Seçilen birinci ampul kusurludur"} \quad , \quad P(B_1)=20/100$$

$$B_2: \text{"Seçilen birinci ampul sağlamdır"} \quad , \quad P(B_2) = 80/100$$

$$\text{A: "Seçilen ikinci ampul kusurludur"} \quad , \quad P(A) =?$$

$$P(A) = P(B_1)P(A \,/\, B_1) + P(B_2)P(A \,/\, B_2)$$

$$P(A) = (\frac{20}{100})(\frac{19}{99}) + (\frac{80}{100})(\frac{20}{99}) = \frac{1}{5}$$

Bağımsız Olaylar

Bir B olayı verilmişken A olayının koşullu olasılığı genel olarak $P(A)$ koşulsuz olasılığının aynı değildir.

$$P(A/B) = P(A)$$

ise A ve B olayları bağımsızdır denir.

Başka bir ifadeyle birinin elde edilmesi, diğerinin elde edilme olasılığını etkilemiyorsa A ve B olayları bağımsızdır denir.

Koşullu olasılığın tanımından $P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$ dir.

$P(A/B)$ nin $P(A)$ ya eşit olduğu varsayımından

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

olur ve bu eşitlik bağımsızlık tanımı olarak kullanılır.

Önerme: A ve B olaylarının bağımsız olması için gerek ve yeter şart

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

olmasıdır.

SORU: A ve B olayları bağımsız olduklarında, ayrık mıdırlar? (HAYIR)

NOT: İki olayın hem bağımsız hem de ayrık olması için, olaylardan herhangi birinin imkansız olay olması gerekir.

Örnek: İki tane hilesiz madeni para havaya atılıyor. İki olay,

A: Birinci paranın Yazı gelmesi

B: İkinci paranın Tura gelmesi

olsun. Bu olaylar bağımsız mıdır?

$\mathrm{S} = \{\mathrm{YY}, \mathrm{YT}, \mathrm{TY}, \mathrm{TT}\}$

$\mathrm{A} = \{\mathrm{YY}, \mathrm{YT}\}$, $P(\mathrm{A}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\mathrm{B} = \{\mathrm{YT}, \mathrm{TT}\}$, $P(\mathrm{B}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$(A \cap B) = \{\mathrm{YT}\}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

A ve B olaylarının bağımsız olması için $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ olmalıdır.

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$ olduğundan iki olay bağımsızdır.

SONUÇ. Üç yada daha çok olay bağımsız olduklarında; aynı anda elde edilmelerinin olasılığı, ayrı ayrı elde edilme olasılıklarının çarpımına eşittir. Örneğin $E, F\ ve\ G$ bağımsız olaylar ise

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F)P(G)$$

olur.

Tam bağımsızlık (Olayların tam bağımsızlığı)

m tane olayın tam bağımsız(karşılıklı bağımsız) olabilmeleri için gerek ve yeter şart, bir defada alınan herhangi sayıdaki olayın her bir kombinasyonunun bağımsız olmasıdır.

$m = 3$ alındığında A, B, C olaylarının tam bağımsızlığı için;

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

eşitliklerinin hepsi sağlanmalıdır.

NOT: Yukarıdaki üç olayın ikişer ikişer bağımsız olması, tam bağımsız oldukları anlamına gelmez.

Örnek. Hilesiz iki madeni para atılsın ve aşağıdaki olayları tanımlayalım.

A : " $\text{\.{I}}lk\ paranın\ tura\ gelmesi$ "

B : " $\text{\.{I}}kinci\ paranın\ tura\ gelmesi$ "

C : " $Her\ ikisinin\ de\ tura\ veya\ her\ ikisinin\ de\ yazı\ gelmesi$ "

Bu üç olay tam bağımsız olaylar mıdır?

Çözüm. $S = \{ YY, YT, TY, TT \}$

$$A = \{ TY, TT \} \quad , \quad P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{ YT, TT \} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{ YY, TT \} \quad , \quad P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{ TT \} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$A \cap C = \{ TT \} \quad , \quad P(A \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$B \cap C = \{ TT \} \quad , \quad P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$A \cap B \cap C = \{ TT \} \ , \ P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Tam bağımsız değildirler.

Bayes Teoremi: B_1 , B_2 , … , B_k lar sonlu bir S örnek uzayının parçalanışı olsun.

A , S içinde $P(A) \neq 0$ olan bir olay ise

$$P(B_r \,/\, A) = \frac{P(B_r)P(A \,/\, B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \,/\, B_i)} \quad , \quad 1 \leq r \leq k$$

dir.

Örnek. Cıvata üreten bir fabrikada toplam üretimin 30/100'ü A makinesi, 30/100'ü B makinesi ve 40/100'ü A makinesi tarafından yapılmaktadır. Bu makinelerin üretimlerinin sırasıyla 1/100, 3/100 ve 2/100'ü kusurlu cıvatalardır. Bir günlük üretim sonunda rasgele bir cıvata seçiliyor ve kusurlu olduğu görülüyor. Bu cıvatanın A makinesinde üretilmiş olma olasılığı nedir?

Çözüm.

A : " $Seçilen\ cıvatanın\ kusurlu\ olması$ "

B_1 : " Seçilen cıvatanın A makinesinde üretilmesi " , $P(B_1) = 0.3$

B_2 : " Seçilen cıvatanın B makinesinde üretilmesi " , $P(B_2) = 0.3$

B_3 : " Seçilen cıvatanın C makinesinde üretilmesi " , $P(B_3) = 0.4$

$P(\,A\,/\,B_1)$: $A\ makinesinde\ \text{üretilen}(bilinen)\ bir\ cıvatanın\ kusurlu\ olma\ olasılığı$ anlamındadır.

$P(\,A\,/\,B_1) = \frac{1}{100} = 0.01$, $P(\,A\,/\,B_2) = \frac{3}{100} = 0.03$, $P(\,A\,/\,B_3) = \frac{2}{100} = 0.02$

verilmiş.

İstenen olasılık; $P(\,B_1\,/\,A)$ 'dır. Bayes teoreminden,

$$P(\,B_r\,/\,A\,) = \frac{P(B_r)P(\,A\,/\,B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(\,A\,/\,B_i)}\ ;$$

$$P(\,B_1\,/\,A\,) = \frac{P(B_1)P(\,A\,/\,B_1)}{P(B_1)P(\,A\,/\,B_1) + P(B_2)P(\,A\,/\,B_2) + P(B_3)P(\,A\,/\,B_3)}$$

$$P(\,B_1\,/\,A\,) = \frac{(0.3)(0.01)}{(0.3)(0.01) + (0.3)(0.03) + (0.4)(0.02)} = \frac{3}{20} = 0.15$$

bulunur. $P(\,B_2\,/\,A\,) =?\ \ 9/20$ $P(\,B_3\,/\,A\,) =?\ \ 8/20$

Örnek. K_1 kavanozunda 1 beyaz 2 siyah top, K_2 kavanozunda 2 beyaz 3 siyah top olsun. K_1 'den bir top çekilip K_2 'ye atılıyor. K_2 'den çekilen top siyah olduğuna göre K_1 'den çekilen topun beyaz olma olasılığı nedir?

Çözüm.

A : " K_2 'den çekilen top siyah "

B_1 : " K_1 'den çekilen top beyaz " , $\mathrm{P}(\mathrm{B}_1) = 1/3$

B_2 : " K_1 'den çekilen top siyah " , $\mathrm{P}(\mathrm{B}_2) = 2/3$

İstenen olasılık, $P(\,B_1\,/\,A\,)$ dır. Bayes teoreminden

$$P(\,B_1\,/\,A\,) = \frac{P(B_1)P(\,A\,/\,B_1)}{P(B_1)P(\,A\,/\,B_1) + P(B_2)P(\,A\,/\,B_2)}$$

hesaplanacak.

$P(\ A\ /\ B_1) = 3/6$

$P(\ A\ /\ B_2) = 4/6$

olup,

$$P(\ B_1\ /\ A\ ) = \frac{(1/3)(3/6)}{(1/3)(3/6) + (2/3)(4/6)} = 3/11$$

bulunur.